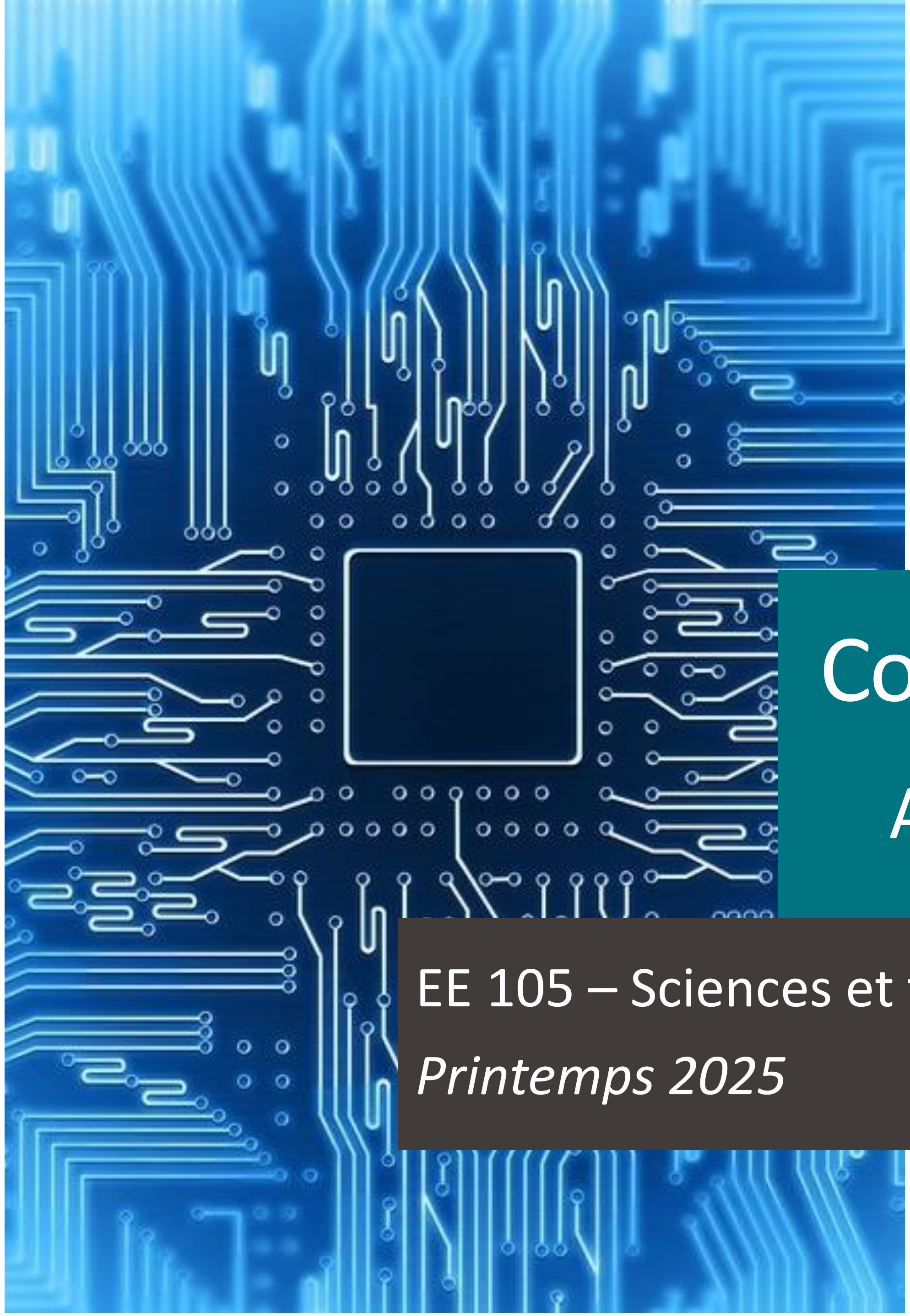


EPFL

Cours 3

Agencements de résistances

EE 105 – Sciences et technologies de l'électricité

Printemps 2025

Prof. Camille Brès - camille.bres@epfl.ch

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Description

Aujourd’hui

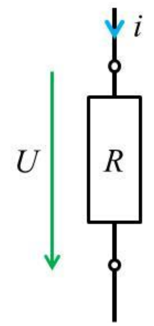
- Résistances en série, en parallèle,
- Combinés série-parallèle
- Arrangement triangle-étoile

Rappel

La résistivité ρ est une propriété du matériau, en Ωm.

$$U = Ri; R \geq 0$$

La résistance (en Ω) est l'opposition faite au passage du courant électrique i dans un circuit fermé soumis à une tension continue U.



Loi d'Ohm: La tension aux bornes d'une résistance est proportionnelle au courant qui la traverse.

Le déplacement d'une charge Q d'un point A à un point B sous l'influence d'un champ électrique implique un travail W_{AB}, en J.

$$W_{AB} = QU_{AB}$$

La puissance P d'un élément sous tension U_{AB} traversé par un courant i est l'énergie délivrée par unité de temps, en W

$$P = U_{AB}i$$

Selon la convention moteur des sens, une puissance positive (négative) est consommée (fournie) par l'élément

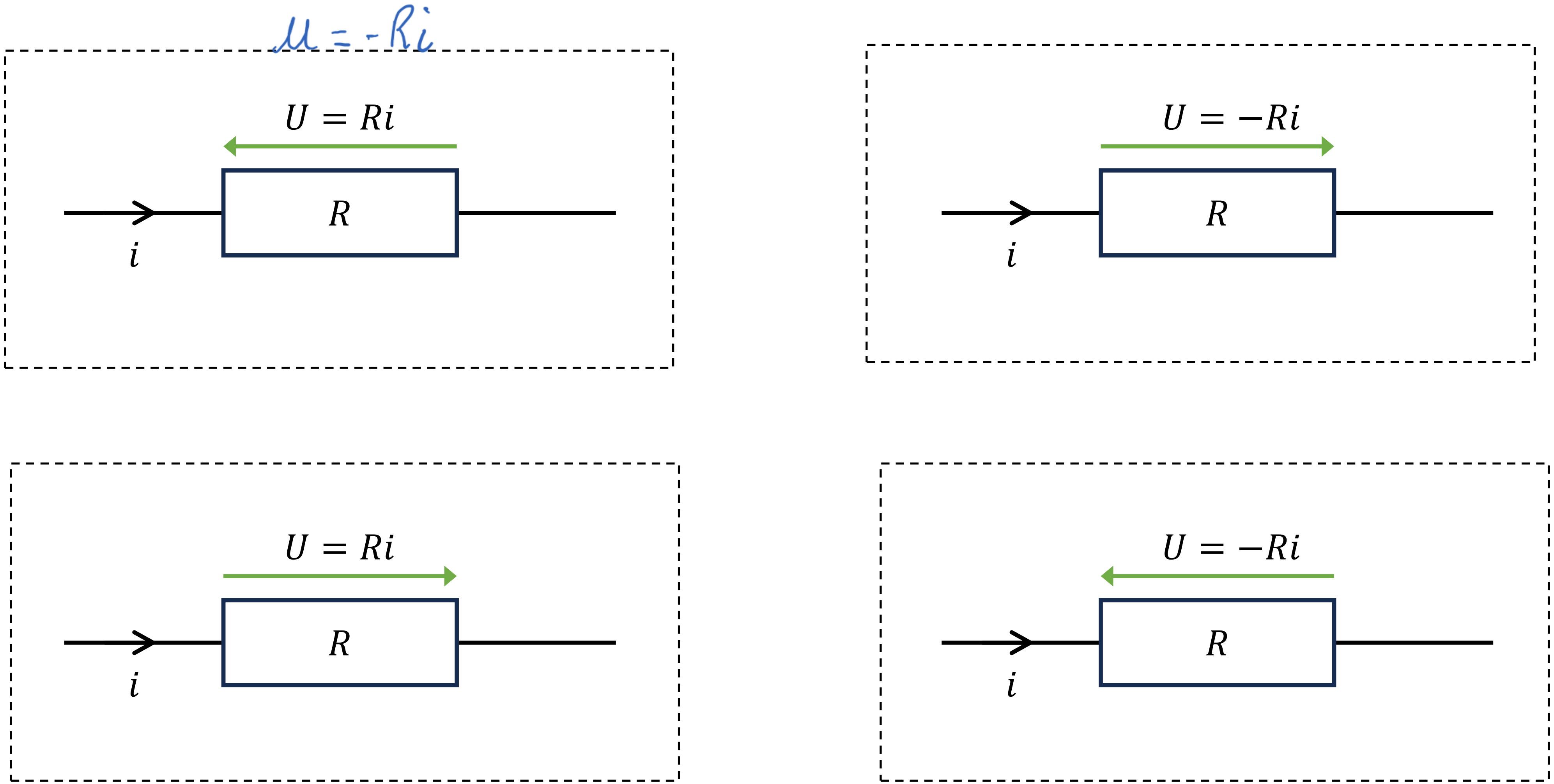
Loi des nœuds de Kirchhoff: somme algébrique des courants sur un nœud est nulle.

$$\sum_{k=1}^{N} i_k = 0$$

Loi des mailles de Kirchhoff: somme algébrique des tensions sur une maille est nulle.

$$\sum_{k=1}^{N} U_k = 0$$

Rappel – quelles sont les bonnes réponses ?



Agencements série et parallèle

Travailler le schéma

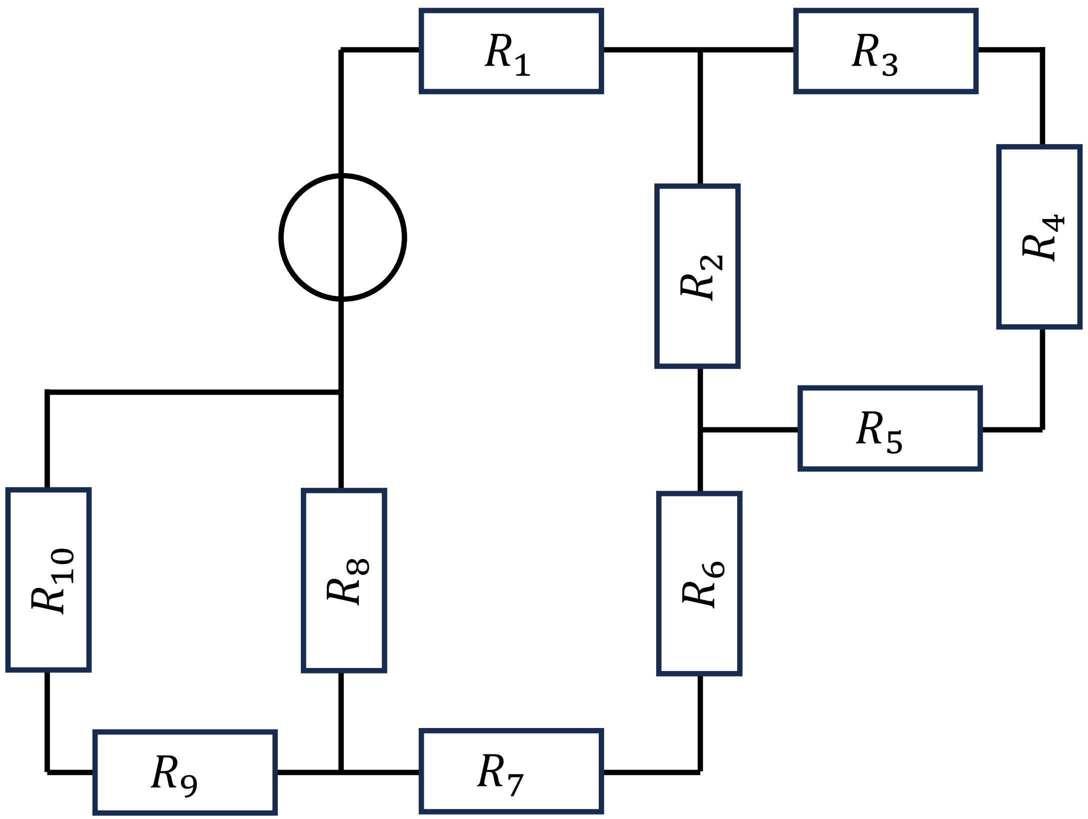
Parfois (et même souvent) la réorganisation du schéma est très utile.

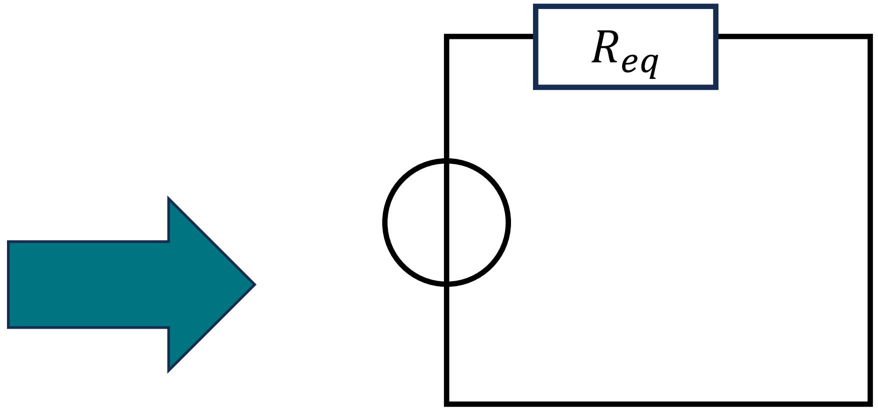
- Cela aide à avoir une meilleure compréhension de la connectivité du circuit.
- Chacun peut avoir sa façon de ‘voir’ un circuit et de mieux identifier comment les éléments sont connectés (série ou parallèle).

Différentes procédures peuvent être utilisées pour obtenir un schéma équivalent de complexité réduite.

- Parfois il suffit tout simplement de le redessiner à notre façon. Par exemple en essayant d’aplanir le schéma si les connections sont croisées.
- Ensuite, la procédure la plus élémentaire consiste à remplacer les éléments de même type (toutes des résistances, ou des inductances etc..) connectés en série ou parallèle par des dipôles équivalents.

Simplifications





Circuit equivalent:

- Plus facile à analyser !

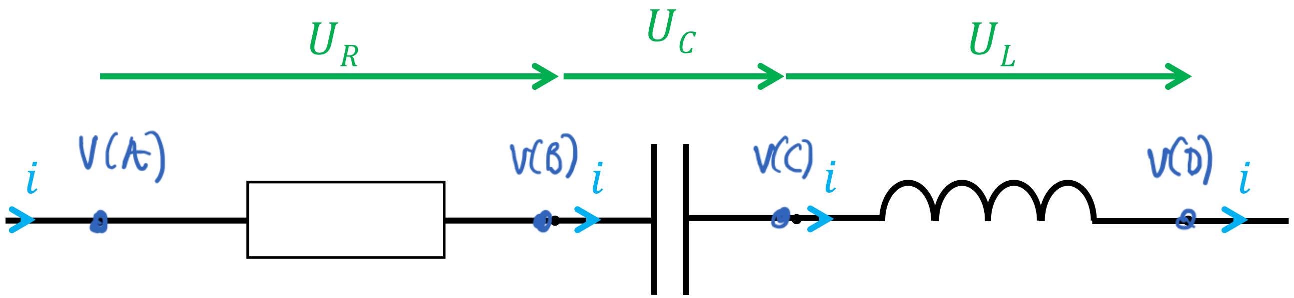
Possible mais:

- C’est long
- Ca peut etre compliqué

Eléments en série: propriété fondamentale

Conformément aux lois de Kirchhoff, les éléments connectés en série:

- sont parcourus par le même courant (1ere loi).
- De plus la tension aux bornes du circuit série est égale à la somme des tensions relatives à chaque élément (2eme loi).

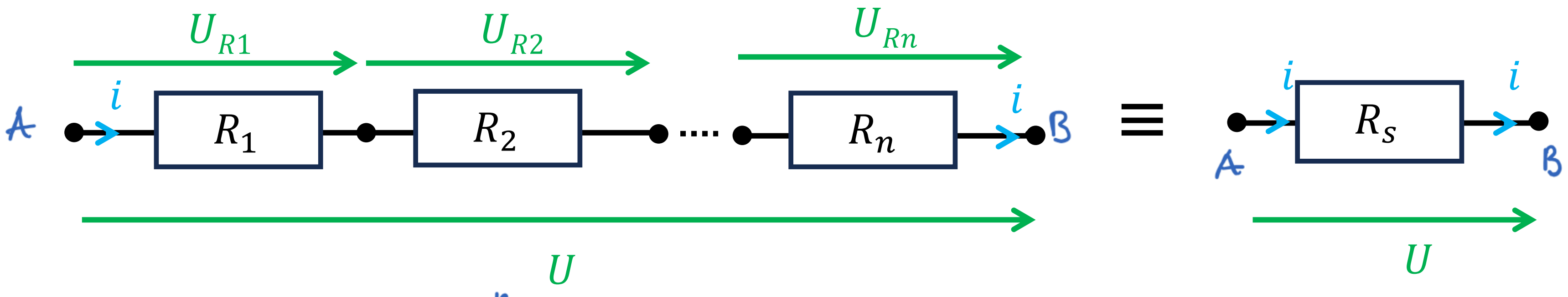


$$U = U_R + U_C + U_L$$

$$u = V(A) - V(D) = (V(A) - V(B)) + (V(B) - V(C)) + (V(C) - V(D))$$
$$= u_R + u_C + u_L$$

Mise en série de résistances

Un circuit composé de plusieurs résistances connectées en série peut se réduire à une unique résistance équivalente R_S



$u = R_s\, i$

loi des mailles : $u = \sum_{k=1}^{n} u_{Rk}$

loi d'Ohm : $u_{Rk} = R_k\, i$

$u = i \sum_{k=1}^{n} R_k$

$\therefore\ R_s = \sum_{k=1}^{n} R_k$

Résistance équivalente

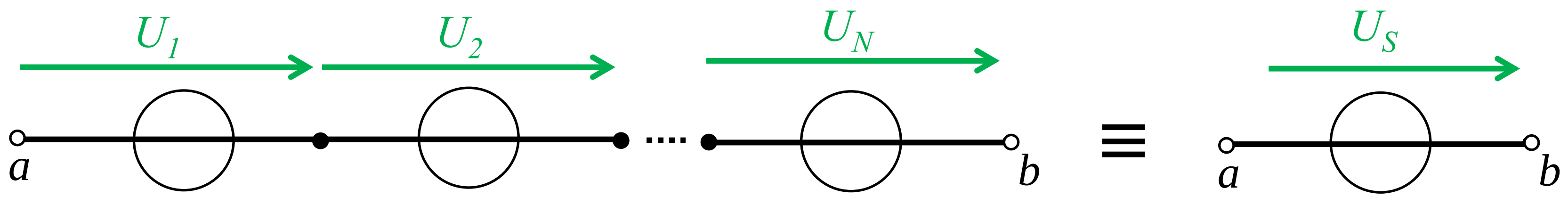
La résistance R_S équivalente à une série de résistances est égale à la somme des résistances

Dans le cas général de R_S résistances en série :

$$R_S = \sum_{k=1}^{N} R_k$$

Mise en série de sources de tension

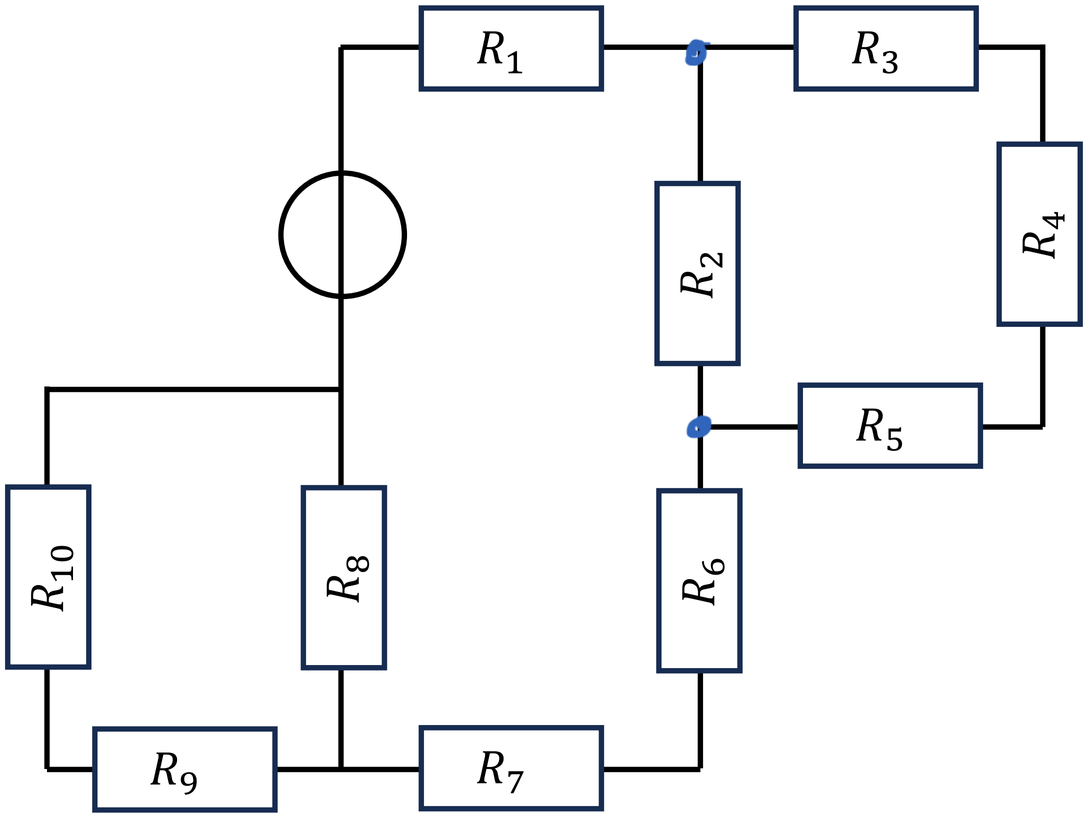
Un circuit composé de plusieurs sources de tension idéales en série est équivalent à une source de tension unique égale à la *somme algébrique* des tensions individuelles

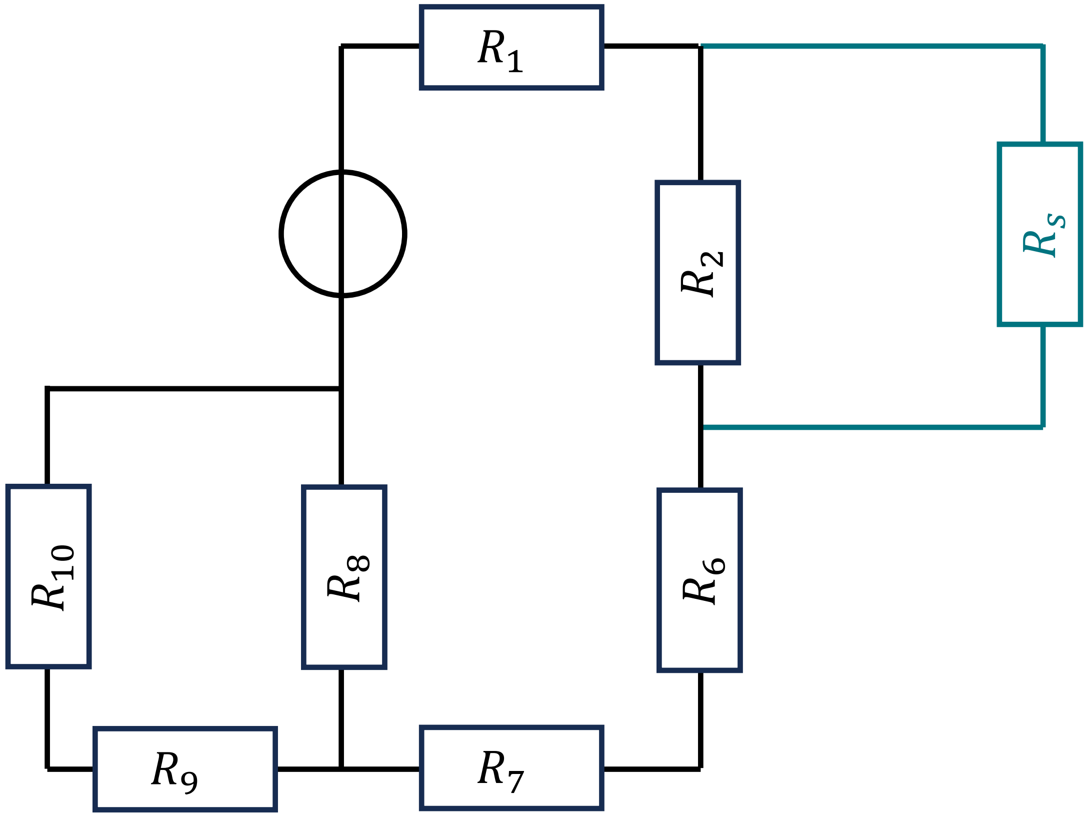


$$U_S = \sum_{k=1}^{N} U_k$$

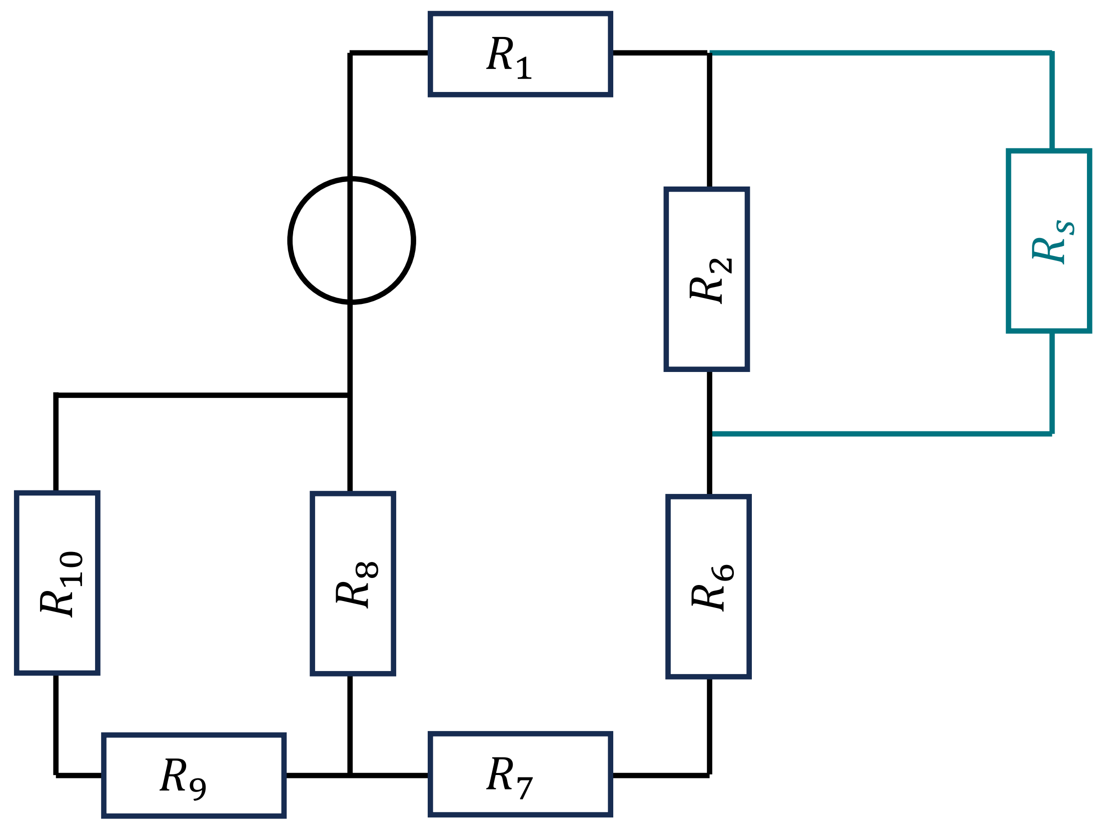
Agencement en série

Exemple: R_3, R_4 et R_5 sont en série





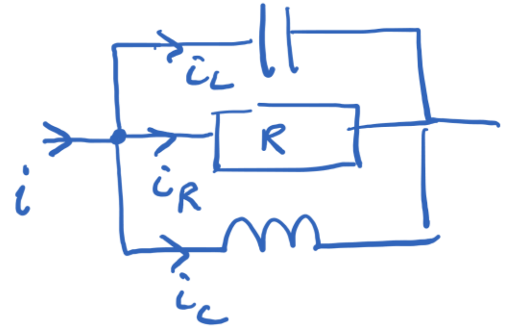
Quels autres éléments sont en série?

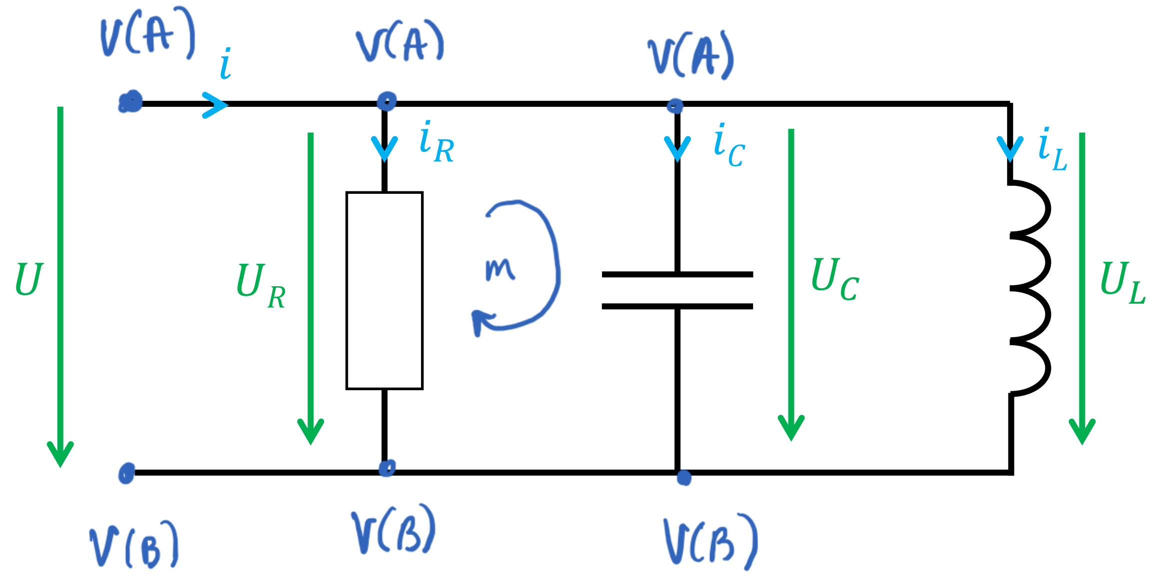


Eléments en parallèle: propriété fondamentale

Conformément aux lois de Kirchhoff, pour les éléments connectés en parallèle:

- La tension aux bornes de chaque élément mis en parallèle est identique (2eme loi).
- Le courant total entrant le circuit parallèle est égal à la somme des courants individuels de chaque élément (1^{ere} loi).



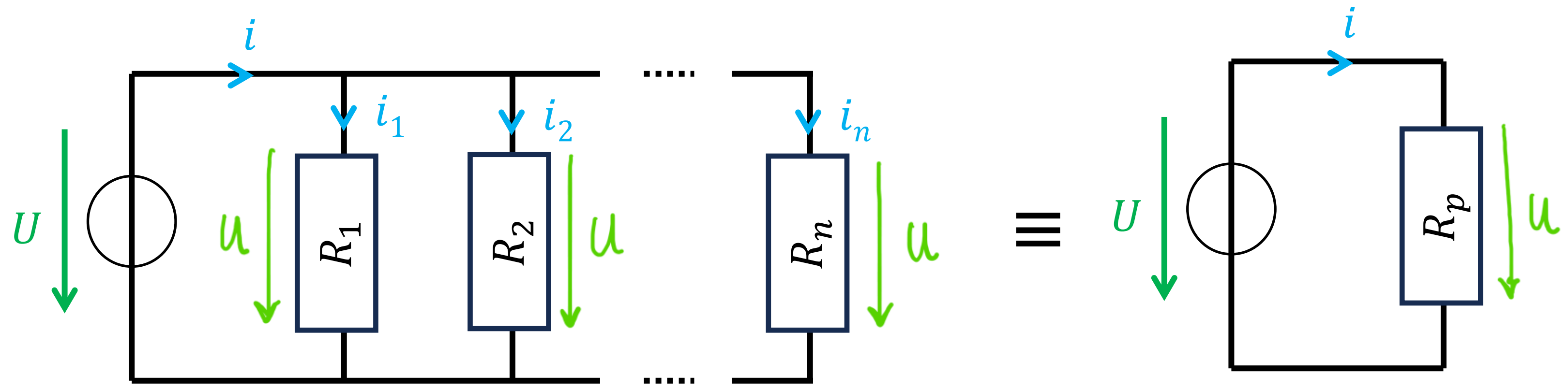


$$U = U_R = U_C = U_L$$

$$i = i_R + i_C + i_L$$

Mise en parallèle de résistances

Un circuit composé de plusieurs résistances connectées en parallèle peut se réduire à une unique résistance équivalente R_p



$u = R_p i$

$i = \frac{u}{R_R}$

loi des noeuds $\quad i = \sum_{k=1}^{n} i_k$

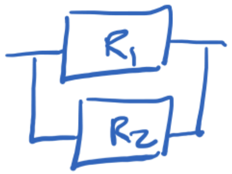
loi d'Ohm $\quad u = R_1 i_1 \Rightarrow i_1 = \frac{u}{R_1}$

$i_2 = \frac{u}{R_2} \qquad i_k = \frac{u}{R_k}$

$$\left.\begin{array}{l} i = \sum_{k=1}^{n} i_k \\ i_k = \frac{u}{R_k} \end{array}\right\} \; i = u \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}$$

$\therefore \; \frac{1}{R_p} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}$

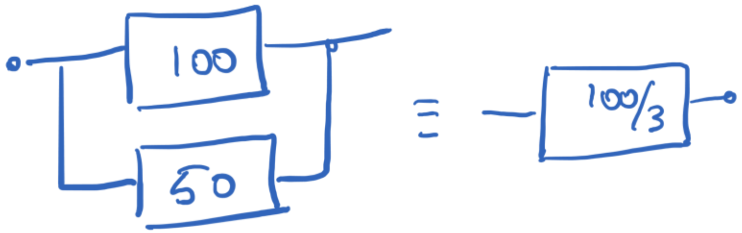
Résistance équivalente



$$R_p = \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)^{-1} = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$$

L'inverse de la résistance R_P équivalente à des résistances en parallèle est la somme des inverses des résistances

Dans le cas général de N résistances en parallèle :



$$\frac{1}{R_P} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{R_k}$$

$$R_p = \left(\frac{1}{100}+\frac{1}{50}\right)^{-1} = \frac{100}{3}\,\Omega$$

Résistance équivalente

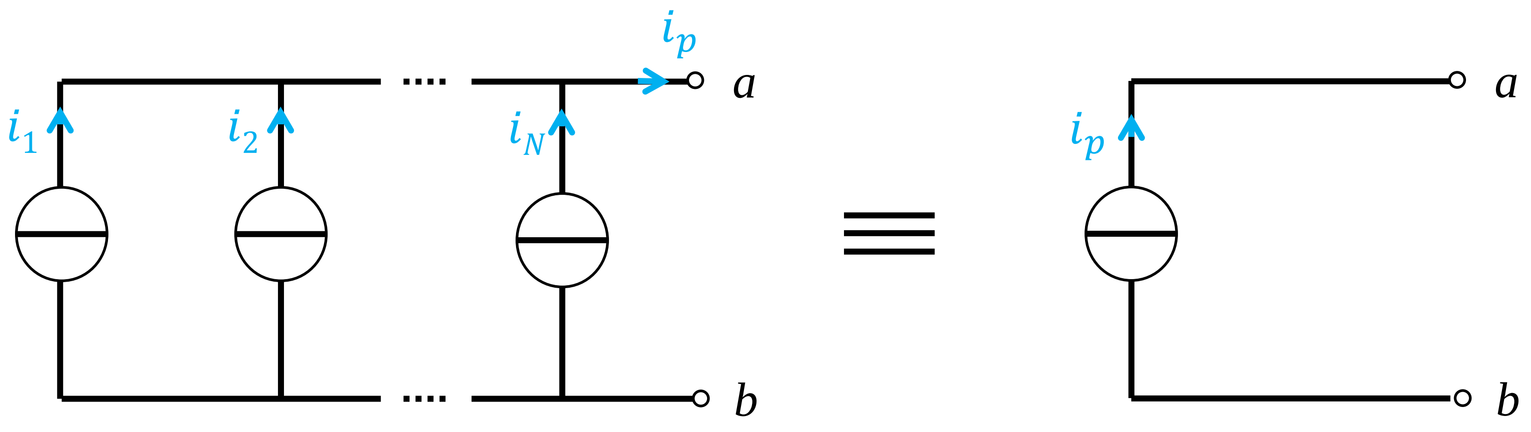
Rappelons que la conductance G est donnée par $G = 1/R$

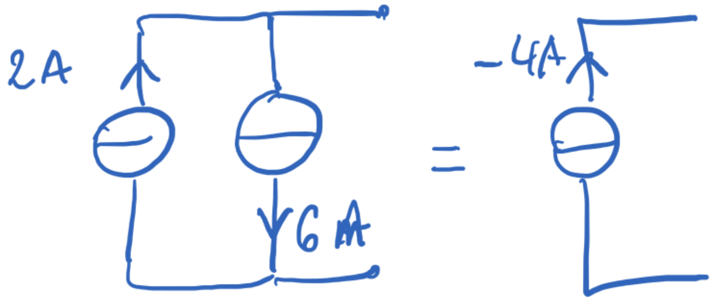
La conductance G_P équivalente à des résistances en parallèle est la somme des conductances

$$G_P = \sum_{k=1}^{N} G_k$$

Mise en parallèle de sources de courant

Un circuit composé de plusieurs sources de courant idéales en parallèle est équivalent à une source de courant débitant la *somme algébrique* des courants individuels.

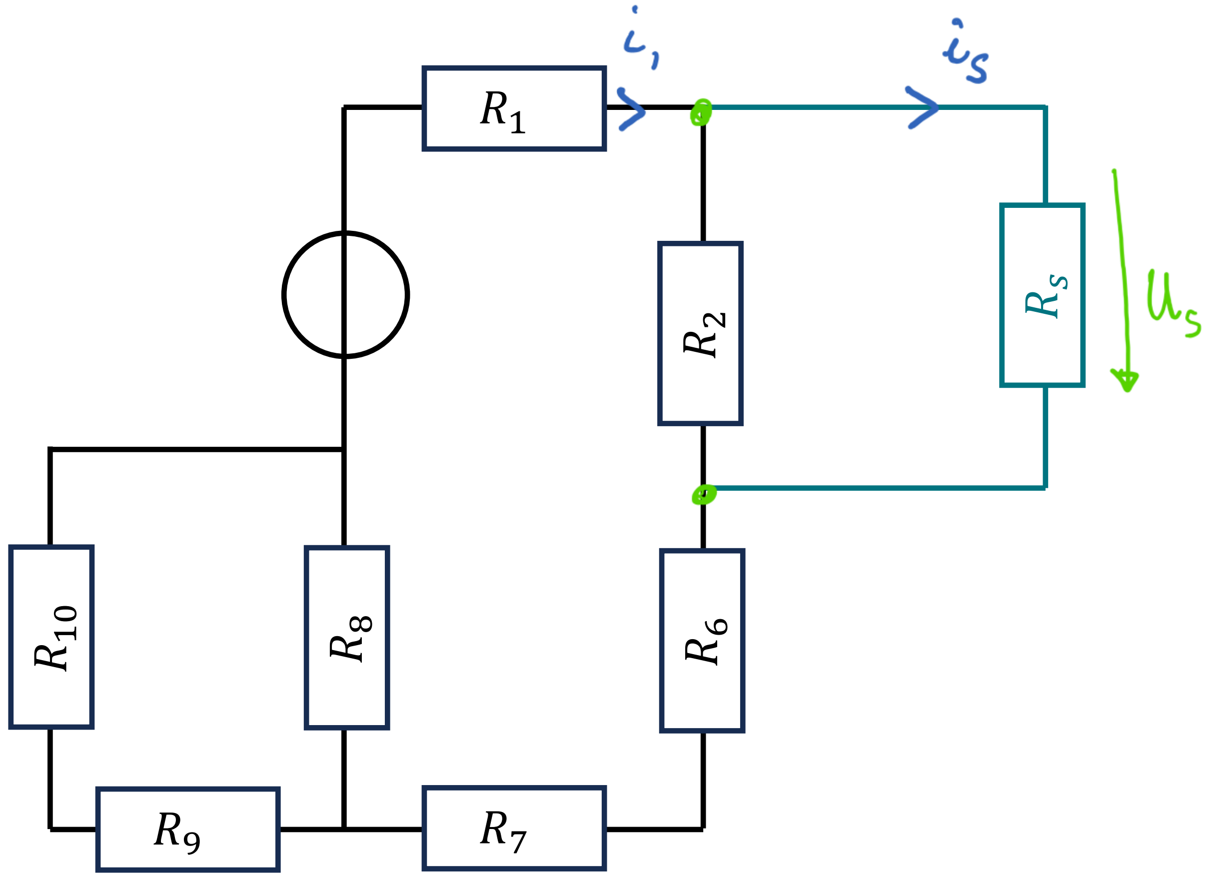


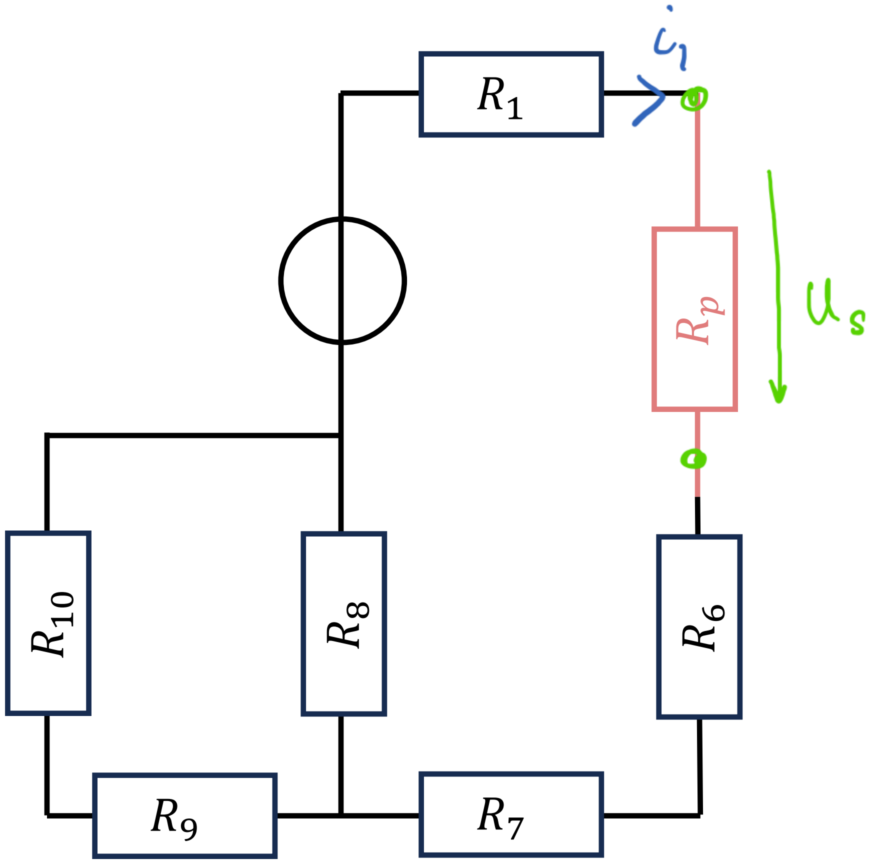


$$i_P = \sum_{k=1}^{N} i_k$$

Agencement en parallèle

$$R_p = \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_s}\right)^{-1}$$



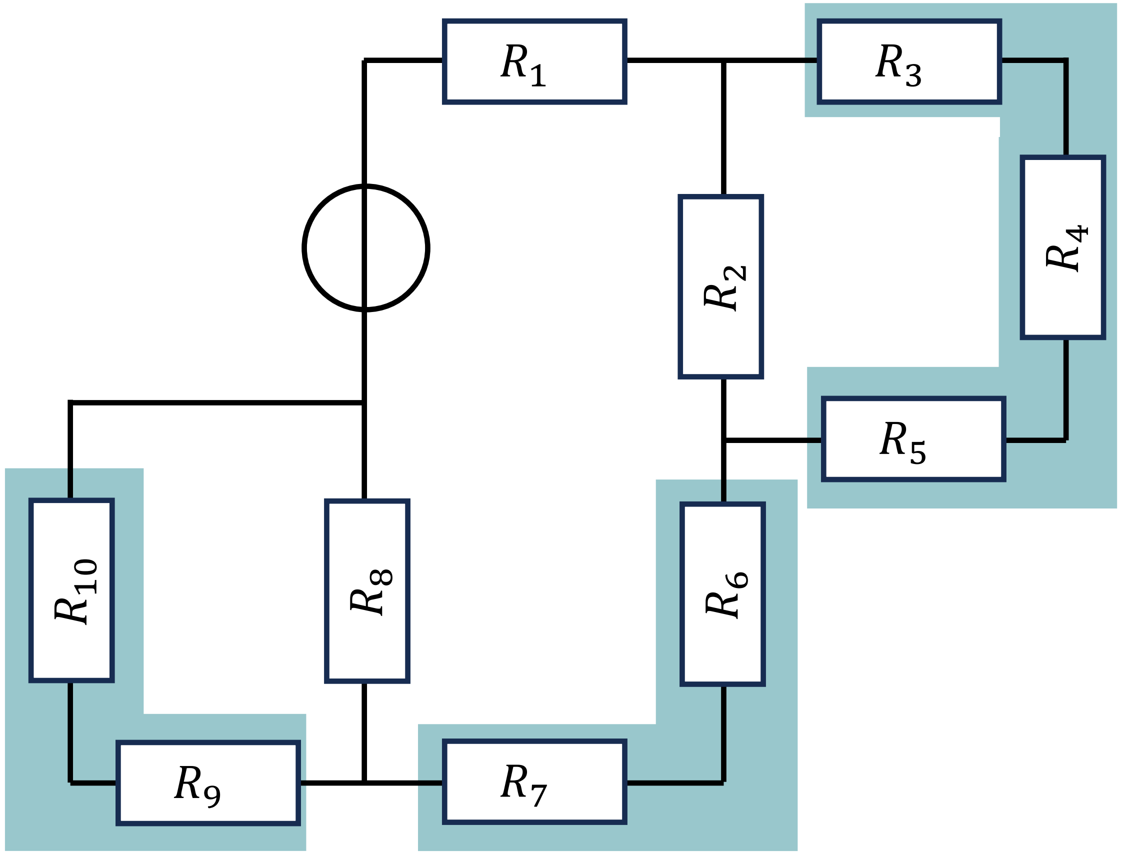


Réduction

En pratique, tout dipôle formé par des combinaisons série-parallèle de résistances (capacitances) (inductances) peut se réduire à une résistance (capacitance) (inductance).

Le schéma équivalent peut être obtenu en procédant par réductions multiples des parties séries et des parties parallèles, consécutivement.

Exemple



$R_1 = 100\ \Omega$

$R_2 = 200\ \Omega$

$\cancel{R_3 = 450\ \Omega}$

$\cancel{R_4 = 2.5\ \mathrm{k}\Omega}$

$\cancel{R_5 = 950\ \Omega}$

$R_{S_1} = 3.9\ \mathrm{k}\Omega$

$\cancel{R_6 = 200\ \Omega}$

$\cancel{R_7 = 450\ \Omega}$

$R_{S_2} = 650\Omega$

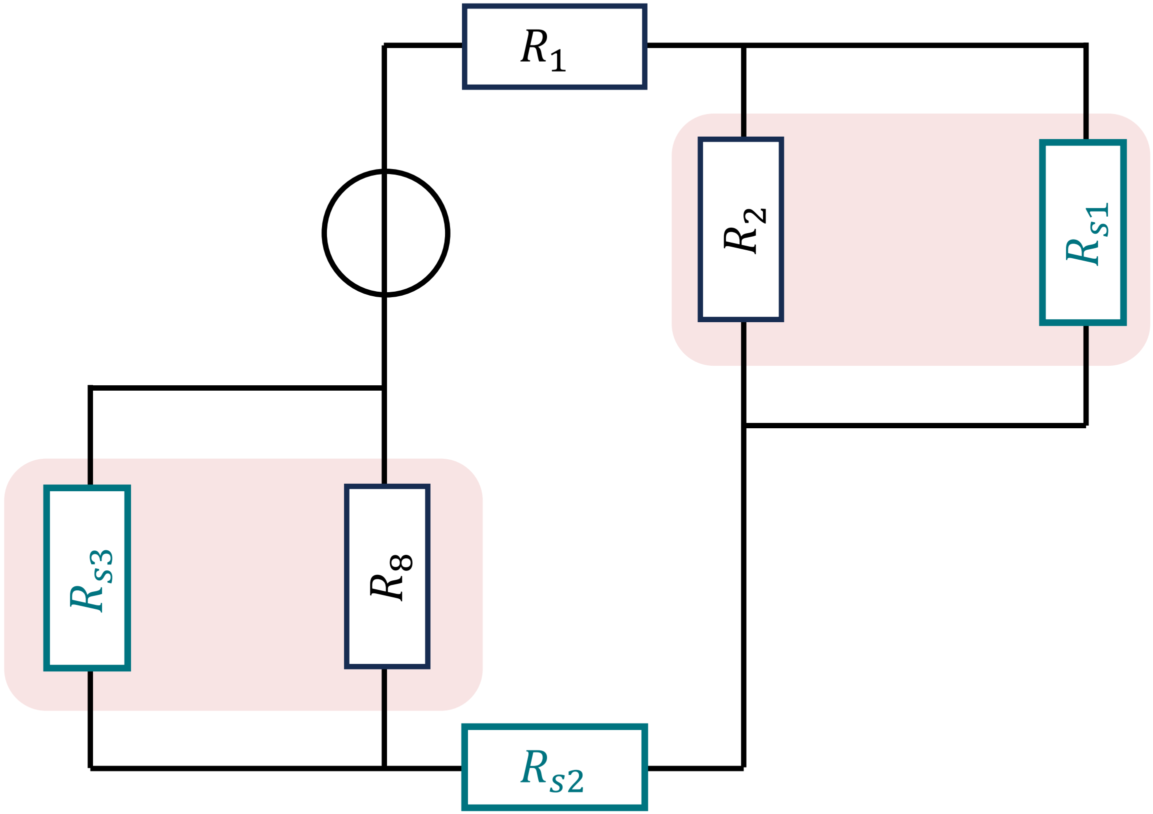
$R_8 = 1\ \mathrm{k}\Omega$

$\cancel{R_9 = 350\ \Omega}$

$\cancel{R_{10} = 650\ \Omega}$

$R_{S_3} = 1\mathrm{k}\Omega$

Exemple



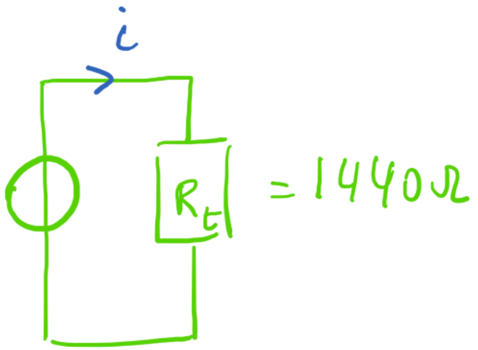
$R_1 = 100\ \Omega$

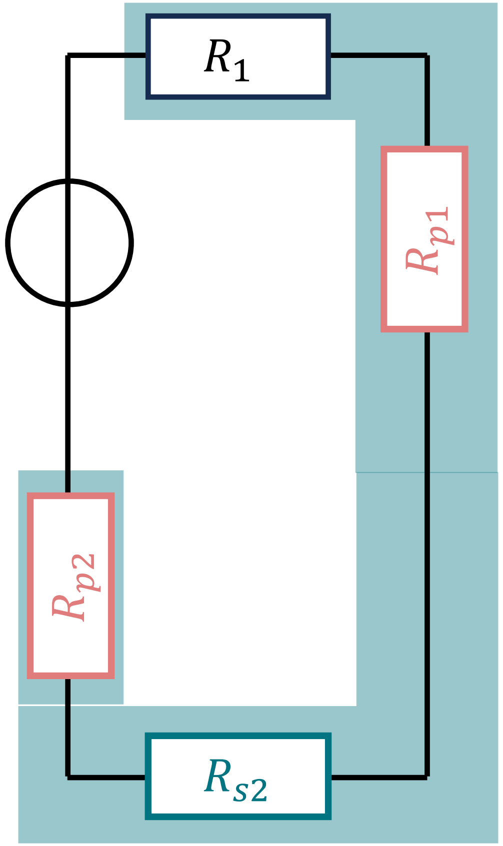
$$\left.\begin{array}{l}\cancel{R_2 = 200\ \Omega}\\ \cancel{R_{s1} = 3.9\ \mathrm{k}\Omega}\end{array}\right\} R_{P1} = 190\ \Omega$$

$R_{s2} = 650\ \Omega$

$$\left.\begin{array}{l}\cancel{R_8 = 1\ \mathrm{k}\Omega}\\ \cancel{R_{s3} = 1\ \mathrm{k}\Omega}\end{array}\right\} R_{P2} = 500\ \Omega$$

Exemple





$R_1 = 100\ \Omega$

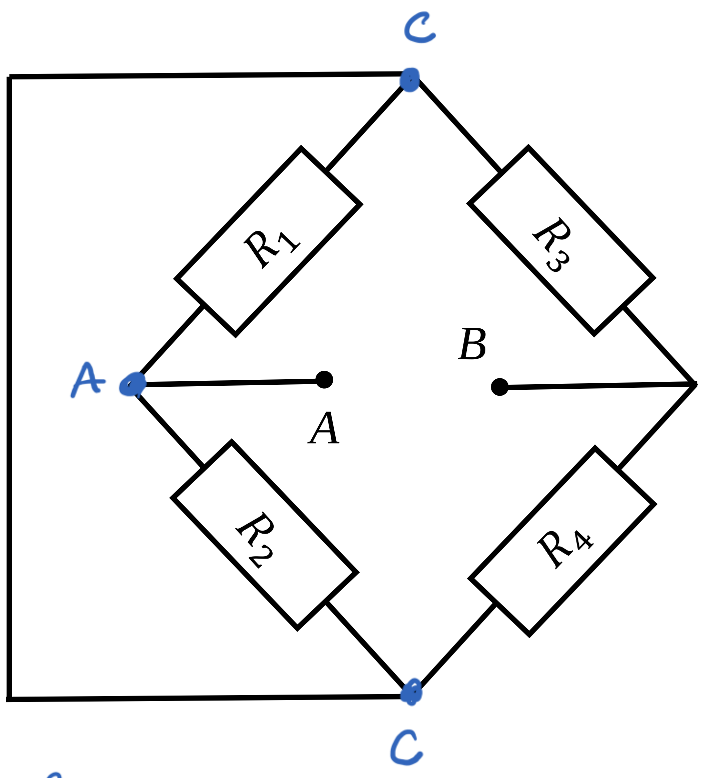
$R_{p1} = 190\ \Omega$

$R_{s2} = 650\ \Omega$

$R_{p2} = 500\ \Omega$

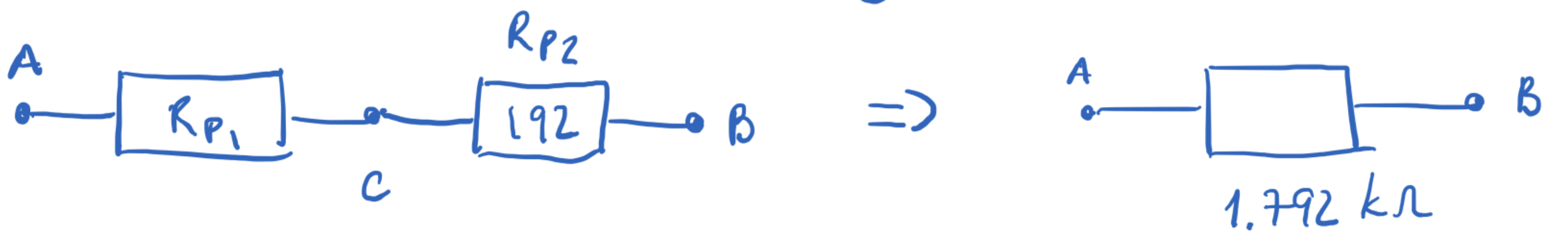
Exemple

Réduisons le schéma suivant à une seule résistance R_{AB} et trouvons sa valeur



$$\left.\begin{aligned} R_1 &= 2\ \mathrm{k}\Omega \\ R_2 &= 8\ \mathrm{k}\Omega \end{aligned}\right\} 1.6\ \mathrm{k}\Omega = R_{P1}$$

$$\left.\begin{aligned} R_3 &= 5\ \mathrm{k}\Omega \\ R_4 &= 200\ \Omega \end{aligned}\right\} 192\ \Omega = R_{P2}$$



Diviseur de tension et de courant

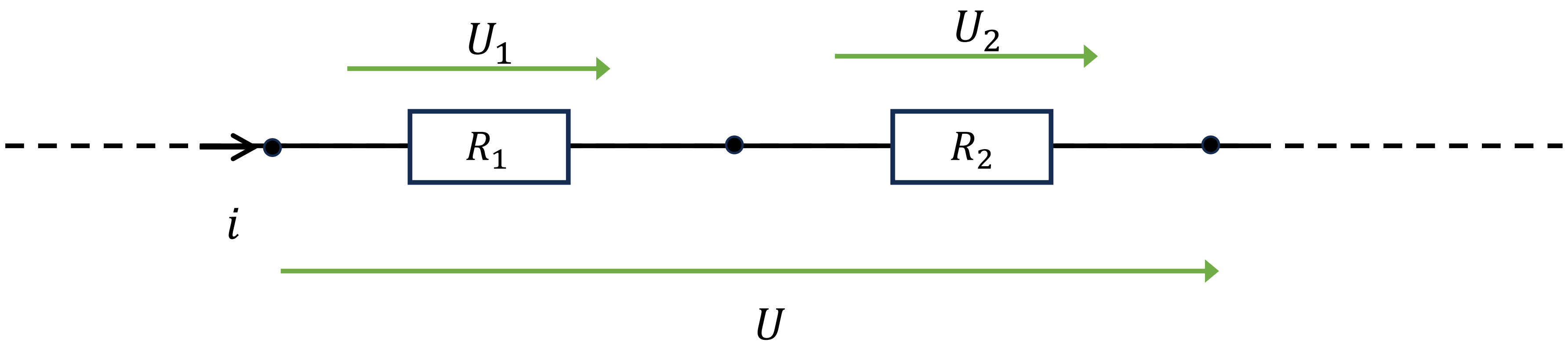
Diviseur de tension et de courant

Reconnaitre des ‘diviseurs’ dans des circuits peut être très utile

Objectif: établir des méthodes simplifiant et accélérant l’analyse des circuits

Diviseur de tension

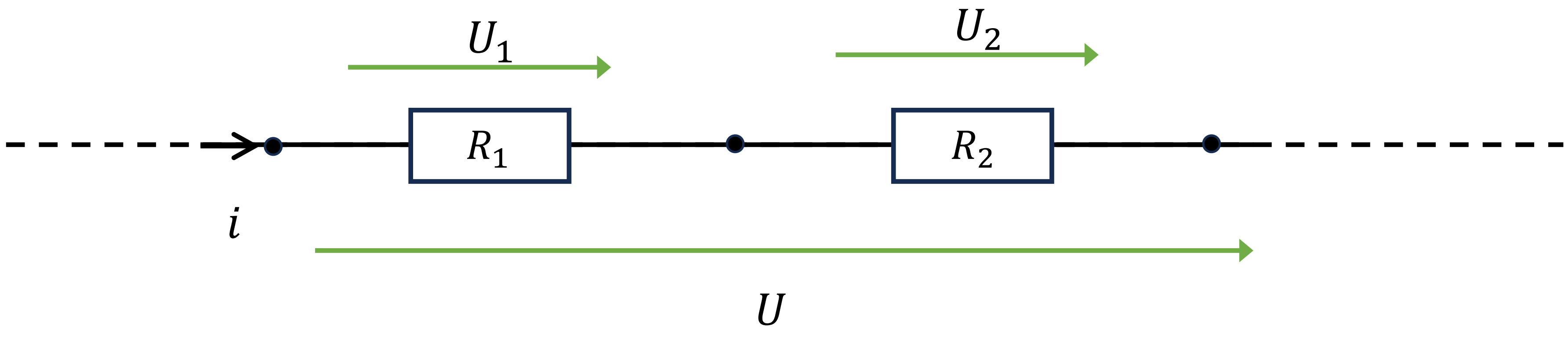
Diviseur de tension: montage électronique simple (agencement en série) qui permet d'extraire une tension plus faible que la tension totale



On fixe U, que valent U_1 et U_2?

Diviseur de tension

On fixe U, que valent U_1 et U_2?



loi des mailles : $U = U_1 + U_2$

loi d'Ohm : $U_1 = R_1 i$

$U_2 = R_2 i$

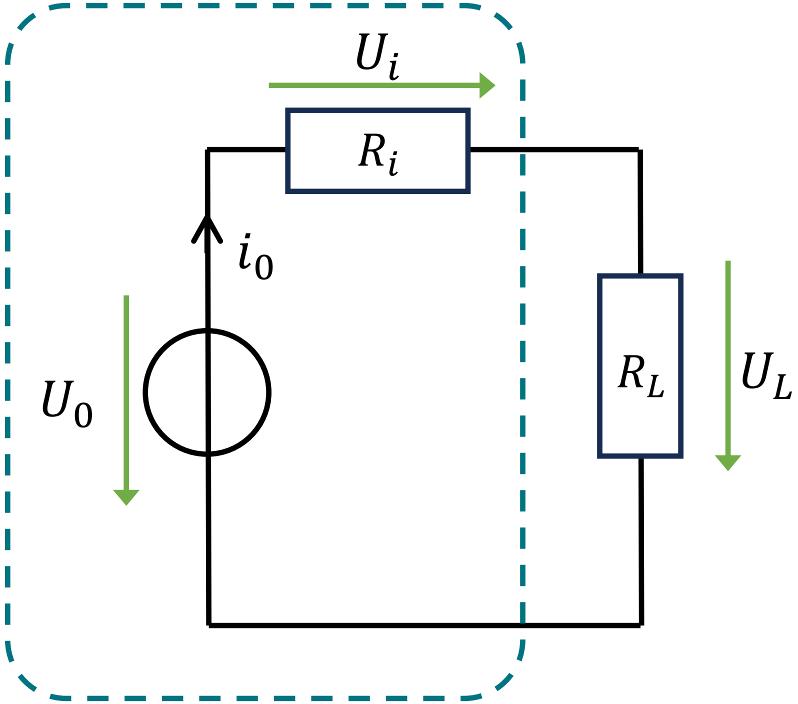
$U = (R_1 + R_2) i$

$i = \frac{U}{R_1 + R_2}$

$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U$

$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U$

Retour sur la source de tension



Source réelle de tension

Méthode 1:

On applique les lois de Kirchhoff et la loi d'Ohm

$$U_0 = U_i + U_L$$

$$U_i = R_i i_0$$

$$U_L = R_L i_0$$

On en déduit:

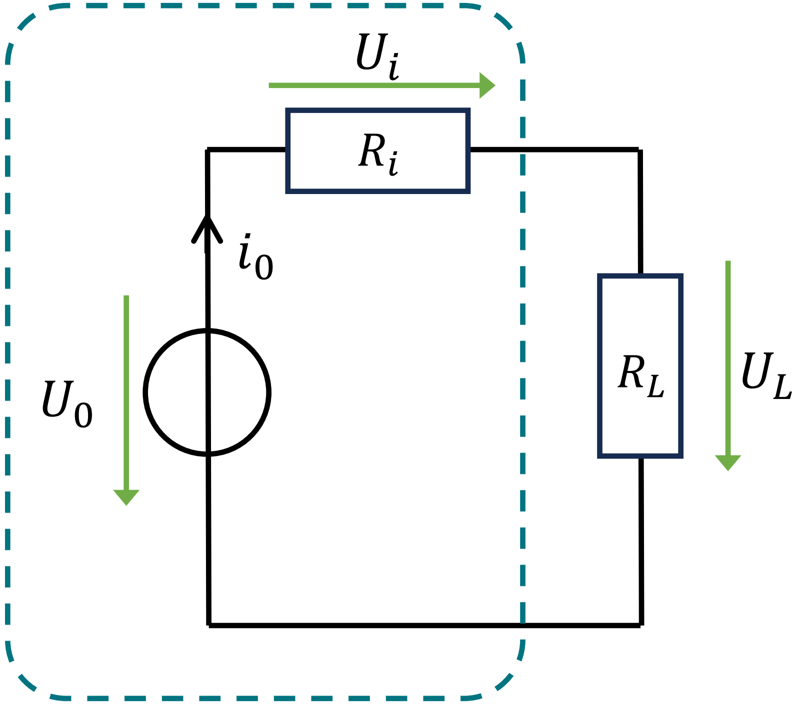
$$U_0 = (R_i + R_L) i_0$$

Et finalement:

$$U_L = \frac{R_L}{R_i + R_L} U_0$$

Cette méthode marche toujours ! Par contre cela peut etre long et fastidieux ….

Retour sur la source de tension



Source réelle de tension

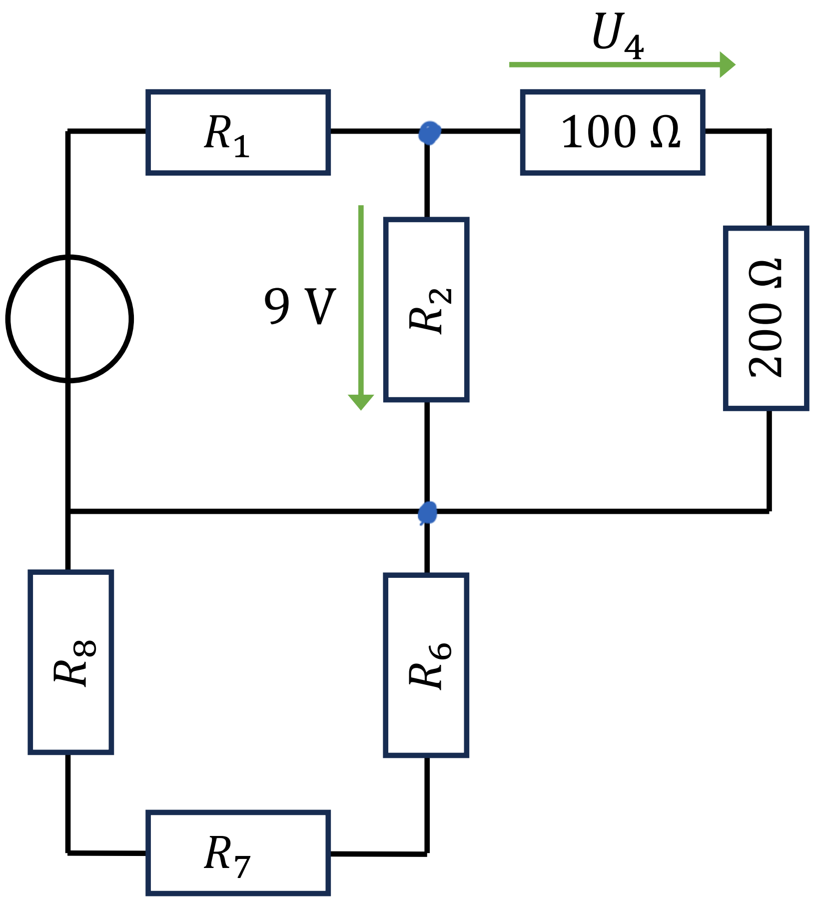
Méthode 2:

On applique le diviseur de tension (U_0 sur R_i et R_L)

$$U_L = \frac{R_L}{R_i + R_L} U_0$$

Exemple

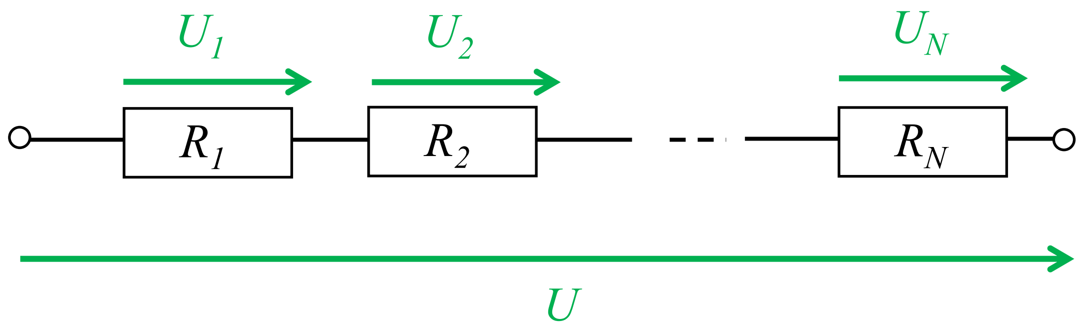
Que vaut U_4?



$$U_4 = \frac{100}{100+200} 9 = 3V$$

Généralisation diviseur de tension résistif

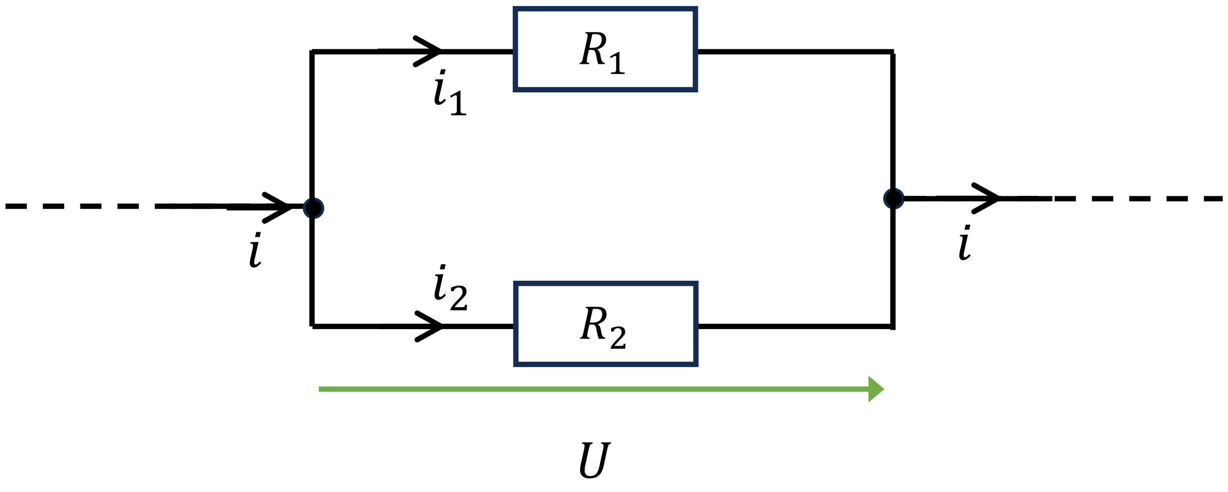
Si une *tension totale* U apparait entre les bornes d'un agencement *en série* de résistances, alors la tension aux bornes de chaque résistance peut être directement exprimée en fonction de U.



$$U_k = \frac{R_k}{R_S} U = \frac{R_k}{\sum_{j=1}^{N} R_j} U$$

Diviseur de courant

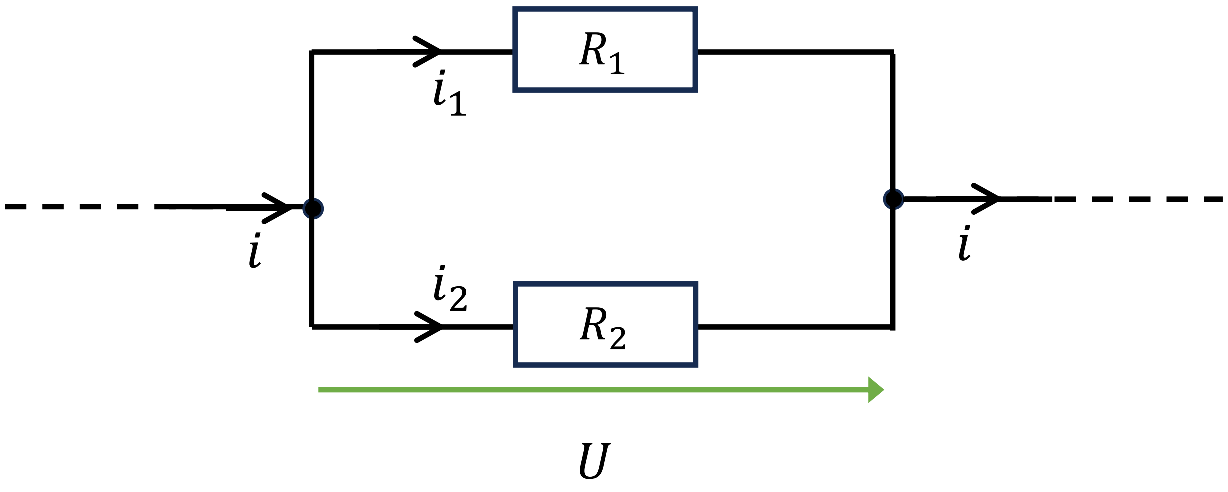
Diviseur de tension: montage électronique simple (agencement en parallèle) qui permet d'extraire un courant plus faible que le courant total



On fixe i, que valent i_1 et i_2?

Diviseur de courant

On fixe i, que valent i_1 et i_2?



loi des noeuds : $i = i_1 + i_2$

loi d'Ohm : $U = R_1 i_1$

$U = R_2 i_2$

$$U = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i$$

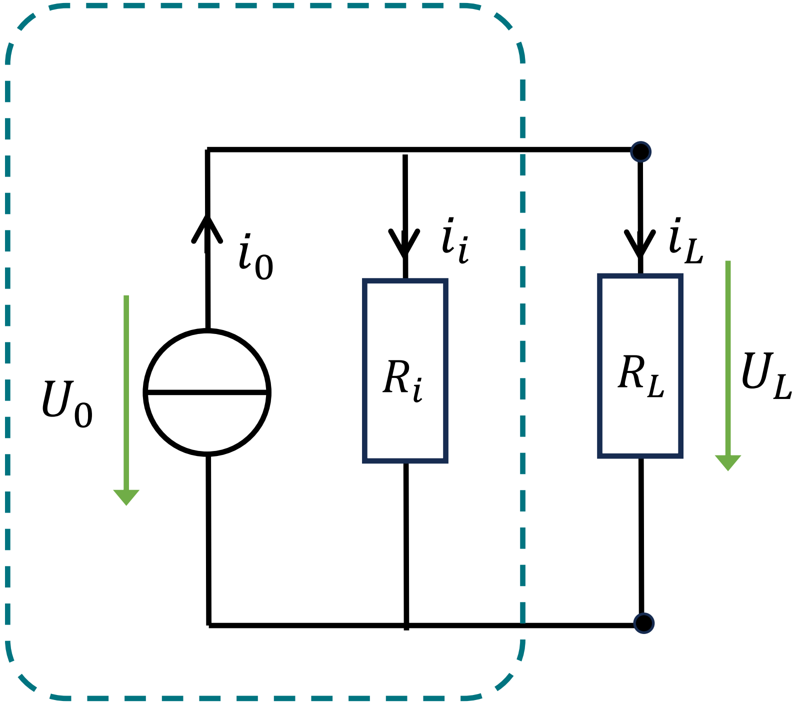
$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i$$

$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$$

Si $R_1 > R_2$

$i_1 < i_2$

Retour sur la source de courant



Source réelle de courant

Méthode 1:

On applique les lois de Kirchhoff et la loi d'Ohm

$$i_0 = i_i + i_L$$

$$U_0 = R_i i_i$$

$$U_0 = R_L i_L$$

On en déduit:

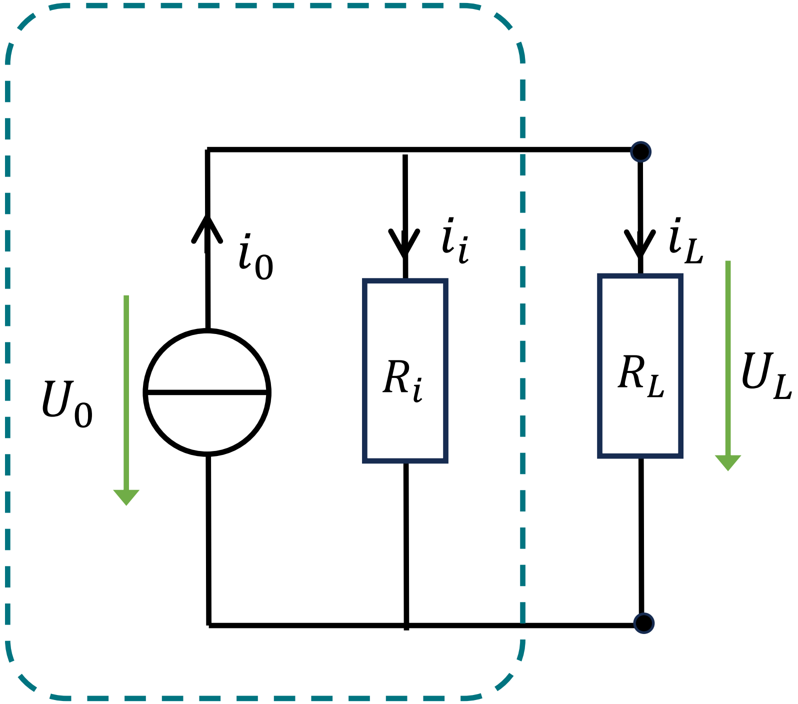
$$i_i = \frac{R_L}{R_i} i_L$$

Et finalement:

$$i_L = \frac{R_i}{R_i + R_L} i_0$$

Cette méthode marche toujours ! Par contre cela peut etre long et fastidieux ....

Retour sur la source de courant



Source réelle de courant

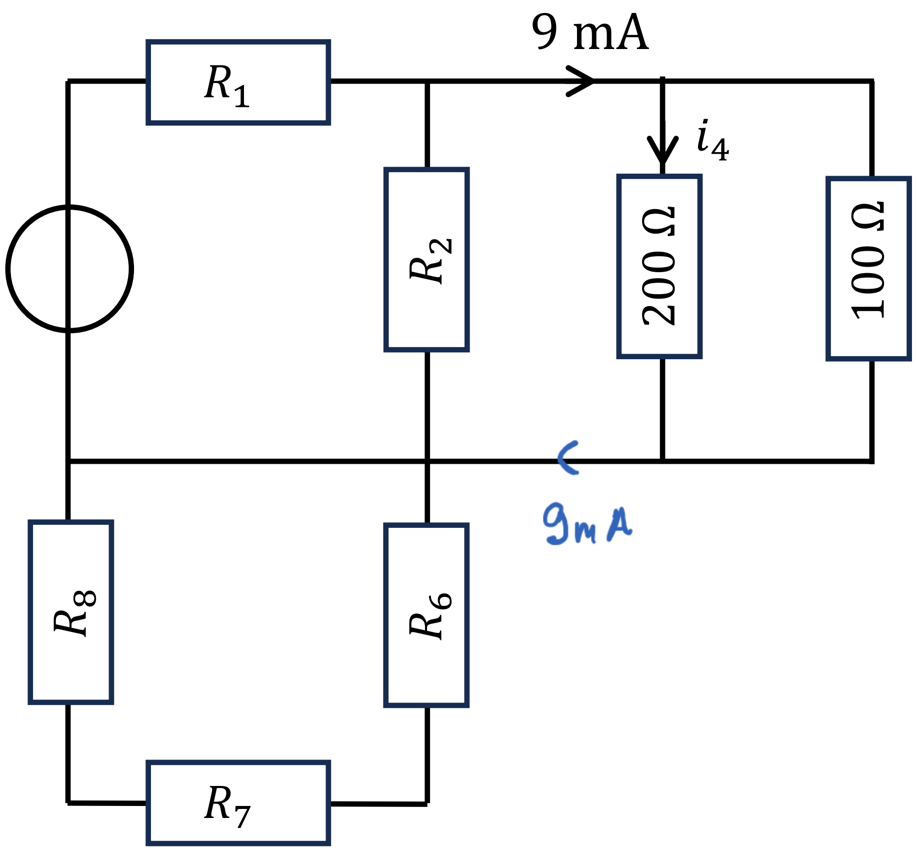
Méthode :

On applique le diviseur de courant:

$$i_L = \frac{R_i}{R_i + R_L}\, i_0$$

Exemple

Que vaut i_4



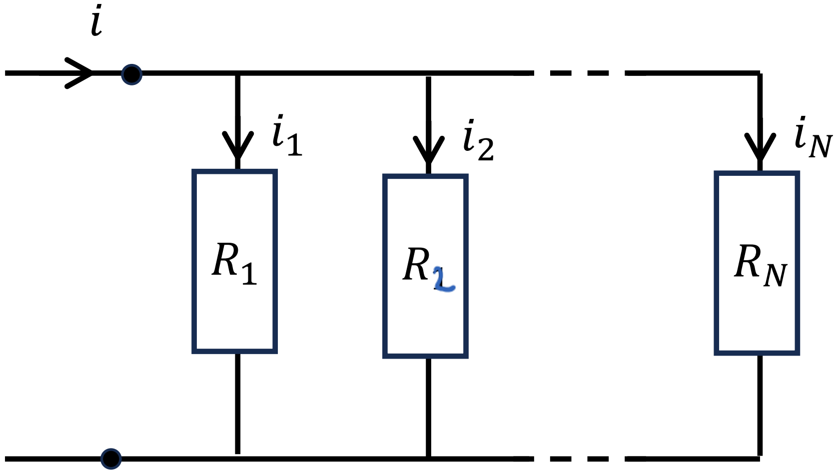
$$i_4 = \frac{100}{100+200} \, 9\,10^{-3} = 3\,mA$$

Généralisation diviseur de courant résistif

Si un courant *total* i est à l'entré d'une combinaison *en parallèle* de résistances, alors le courant partiel dans une des branches peut être directement exprimé en fonction de i.

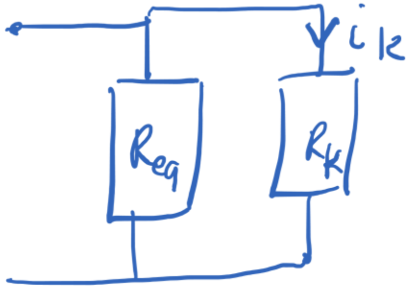
i_2 ?

$$R_{eq(-R_2)} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \cdots\right)^{-1}$$



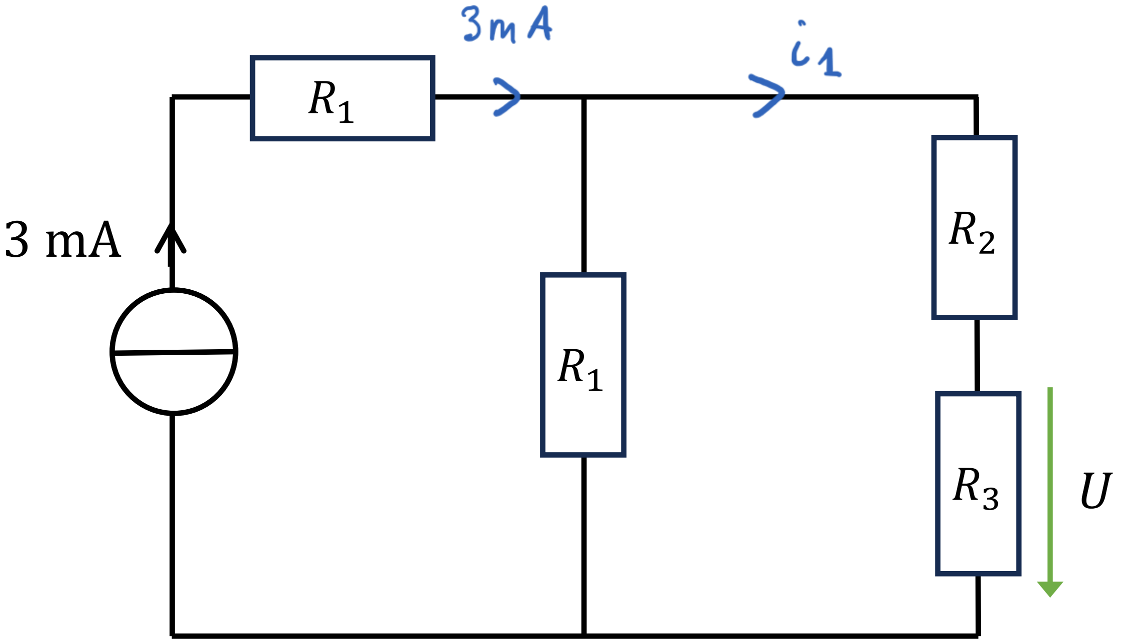
$$i_k = \frac{R_{eq(-R_k)}}{R_k + R_{eq(-R_k)}}\, i$$

- Pensez à la réduction à 2 résistances …



Exemple

Exprimez U en function des résistances et de la valeur de la source de courant.



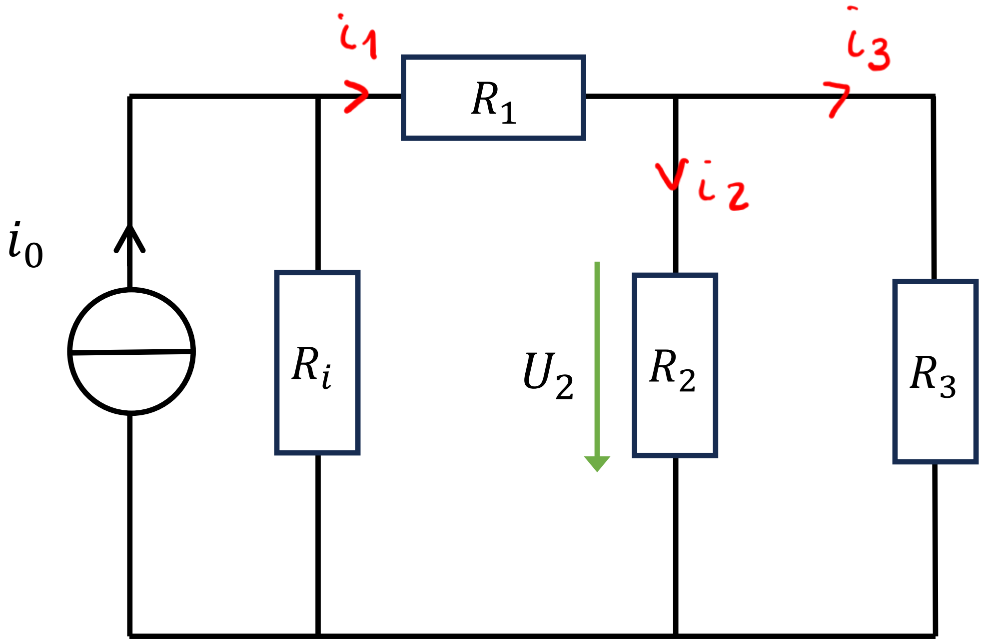
$$U = R_3 i_1$$

$$i_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} (3\,10^{-3})$$

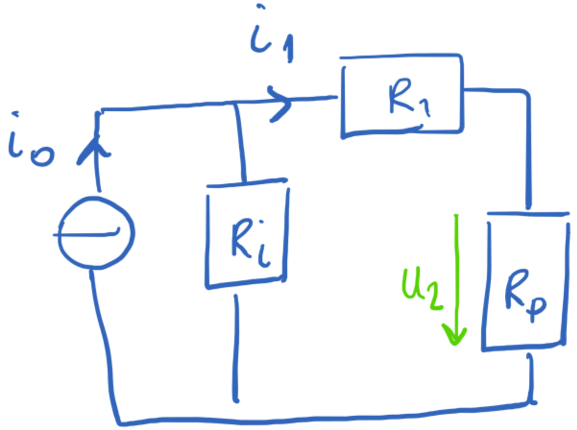
$$\therefore U = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} (3\,10^{-3}) \text{ V}$$

Exemple

Trouver U_2 et P_2



$i_0 = 110\ \mu\text{A}$
$R_i = 100\ \text{k}\Omega$
$R_1 = 1.25\ \text{k}\Omega$
$R_2 = 10\ \text{k}\Omega$
$R_3 = 10\ \text{k}\Omega$



$R_p = 5\ \text{k}\Omega.$

$$i_1 = \frac{R_i}{R_i + R_1 + R_p}\, i_0 = 103.5\ \mu A$$

$$U_2 = R_p\, i_1 = 0{,}52\ V$$

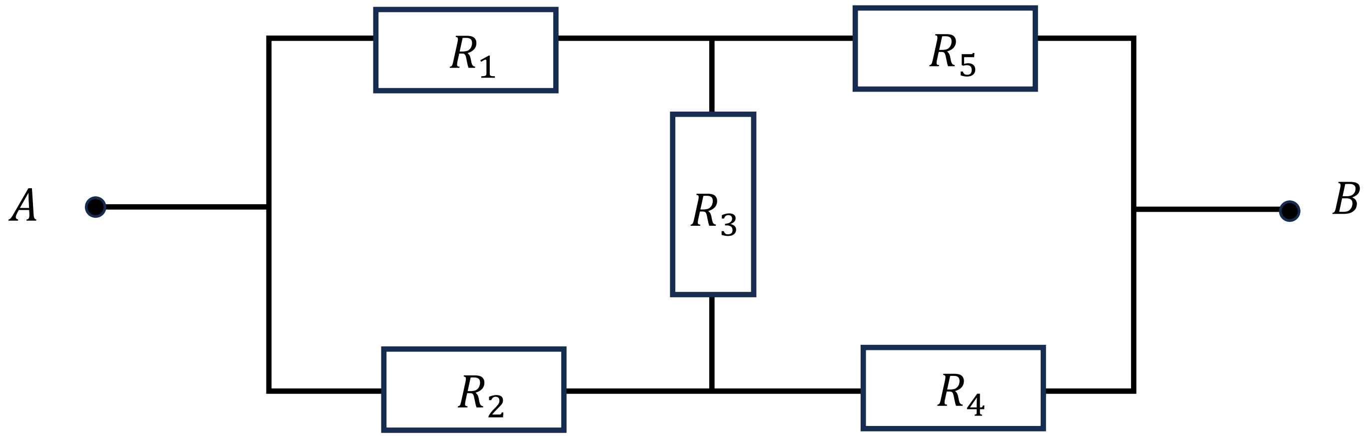
$$P_2 = U_2\, i_2 = \frac{U_2^2}{R_2} = 27\ \mu W$$

Agencement triangle - étoile

Autres arrangements

Pour calculer la résistance équivalente d’un ensemble de résistance:

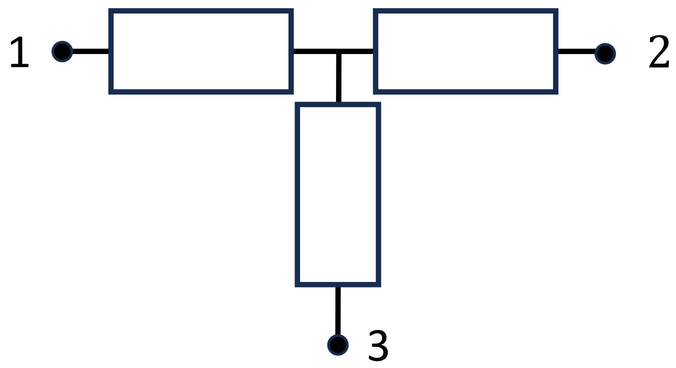
- Il suffit de réduire pas à pas les groupes de résistances en série et en parallèle.
- Cette procédure de réduction simple n’est pas toujours possible !



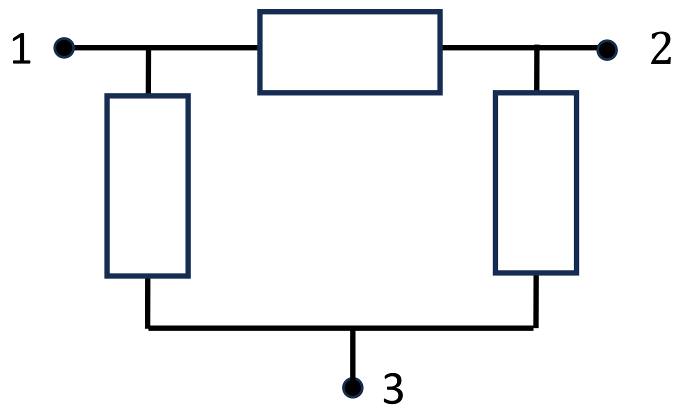
R_{AB} ?

Circuits en étoile (T) et circuits en triangle (Δ)

Un groupe de trois résistances peut former une étoile (on dit aussi T ou Y)



Trois éléments peuvent aussi former un circuit fermé. C'est l'arrangement dit en triangle ($\boldsymbol{\Delta}$ ou Π)

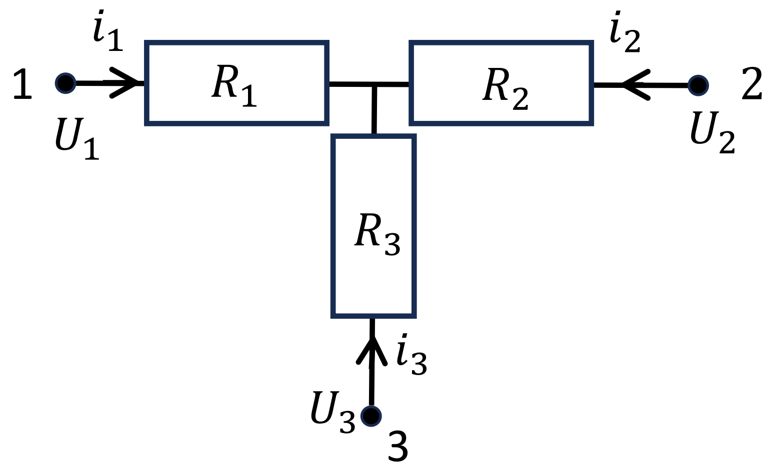


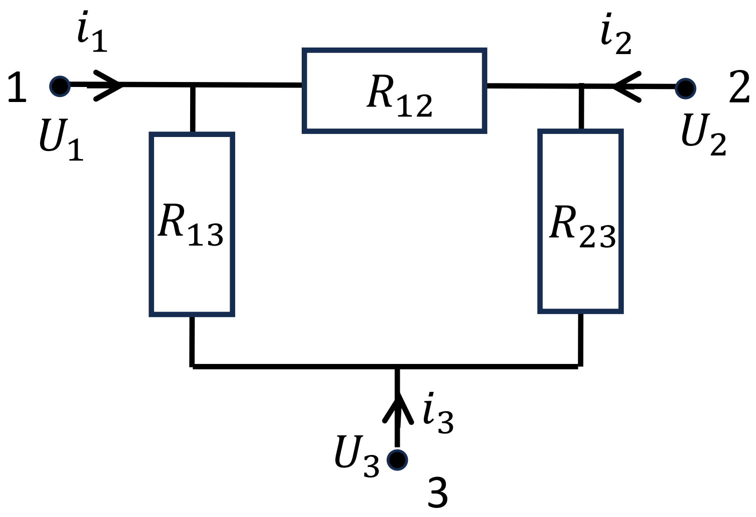
De telles configurations apparaissent souvent

- Peut être contourné en remplaçant circuit étoile par circuit équivalent triangle (ou vice versa)

Equivalence de tripôles en étoile-triangle à résistances

Soient les 2 tripôles ci-dessous:

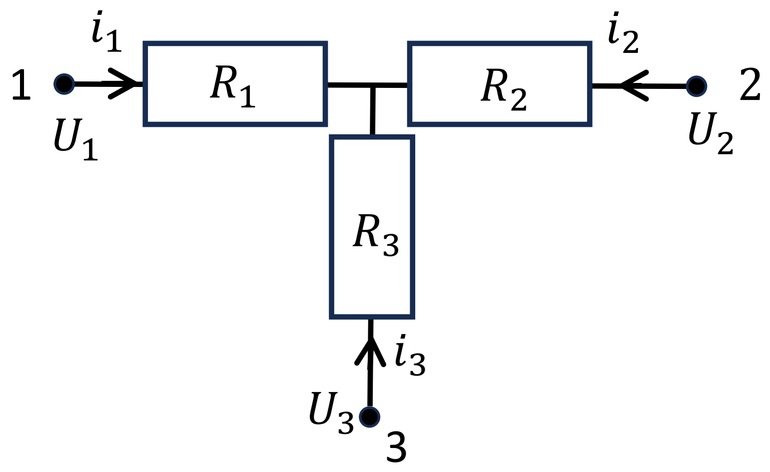


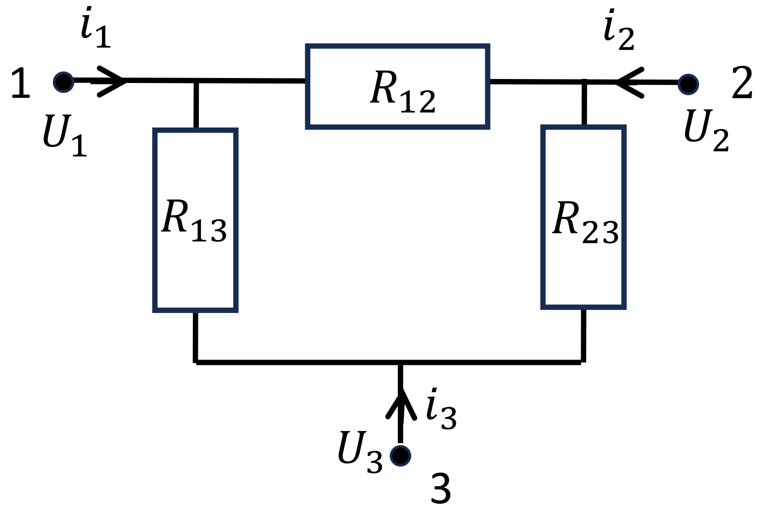


Les deux tripôles sont équivalents s'ils ont en tout temps le même courant i et le même potentiel U pour chaque borne du même numéro.

- En partant de l'arrangement triangle et en connaissant les résistances R_{12}, R_{23} et R_{31} nous allons déterminer R_1, R_2 et R_3 de l'arrangement en étoile correspondant.
- Nous nous baserons sur la résistance entre deux ports, considérant que la troisième n'est pas connectée (i = 0 A).

Equivalence de tripôles en étoile-triangle à résistances





Supposons que i_3 = 0 A

Les 2 circuits doivent se comporter en bipôles équivalents entre les bornes 1 et 2:

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

Equivalence de tripôles en étoile-triangle à résistances

En faisant de même pour tout groupement de 2 ports:

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad \textit{(1)}$$

$$R_2 + R_3 = \frac{R_{23}(R_{31} + R_{12})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad \textit{(2)}$$

$$R_3 + R_3 = \frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad \textit{(3)}$$

Nous pouvons ensuite extraire une expression pour R_1

(1) - (2): $$R_1 - R_3 = \frac{R_{31}(R_{12} - R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad \textit{(4)}$$

(4) + (3): $$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

Les deux autres résistances sont obtenues par permutation cyclique.

Equivalence de tripôles en en étoile-triangle à résistances

Théorème de Kennelly: Une maille triangulaire appartenant à un réseau et ne comportant que des résistances R_{12}, R_{23} et R_{31} peut être remplacée par trois résistances R_1, R_2 et R_3 disposées en étoile:

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \qquad R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \qquad R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

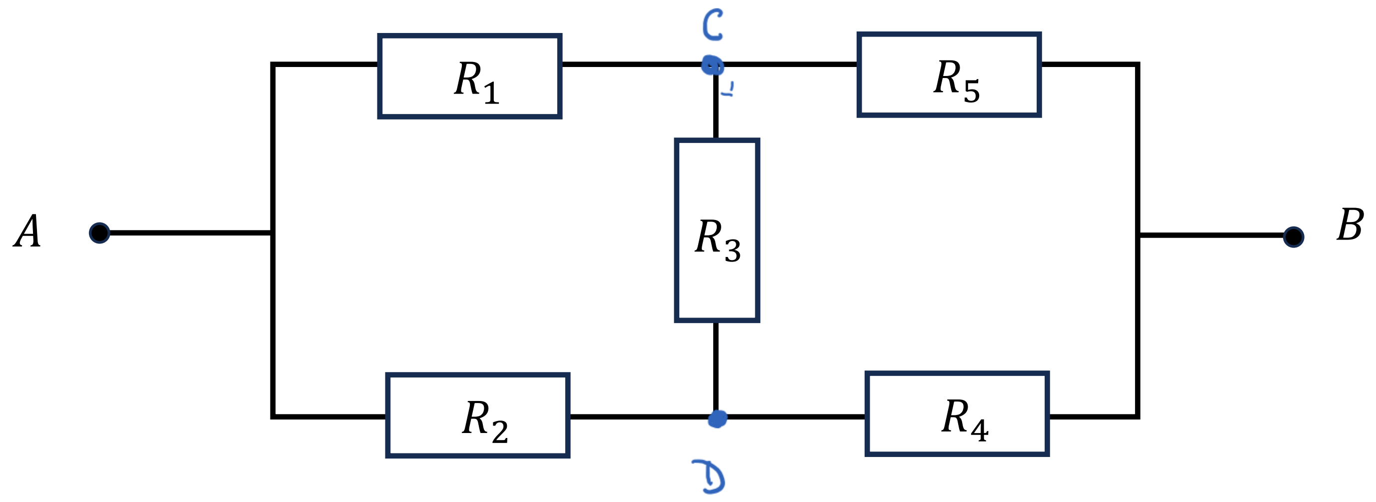
Mémorisation:

- La résistance 'étoile' aboutissant en un sommet, est égale au quotient du produit des 2 résistances 'triangle' également connectées à ce sommet, par la somme des trois résistances triangle.

A noter que le passage inverse de l'étoile au triangle est souvent sans intérêt en continu puisqu'il a tendance à compliquer le réseau.

- Il peut être nécessaire en alternatif triphasé (que nous ne verrons pas ce semestre)

Exemple



$R_1 = 5\,\Omega$

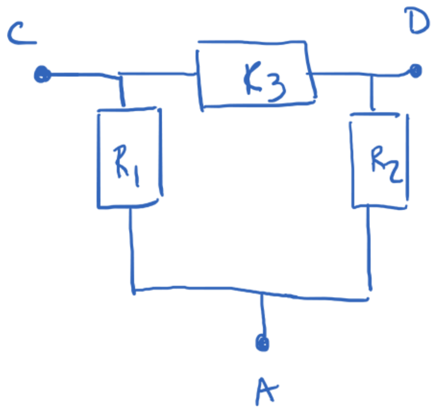
$R_2 = 5\,\Omega$

$R_3 = 10\,\Omega$

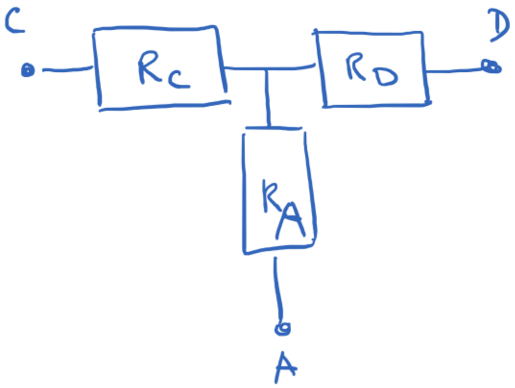
$R_4 = 7.5\,\Omega$

$R_5 = 37.5\,\Omega$

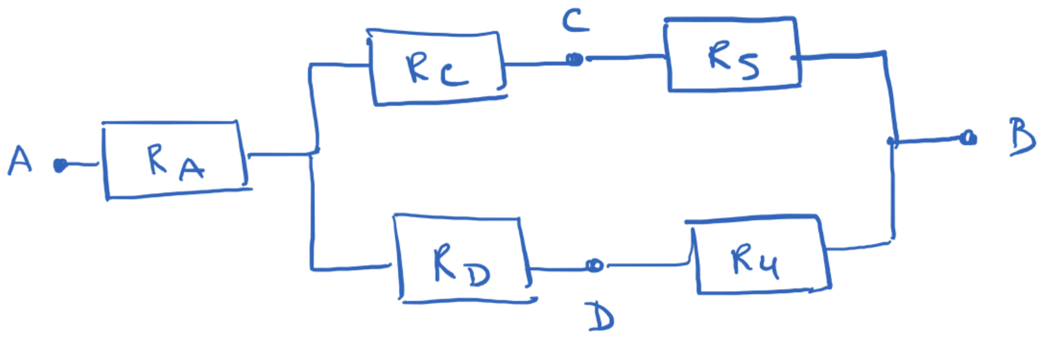
On peut changer l'arrangement triangle ADC en étoile :



$\Rightarrow$



et le circuit deviendra :

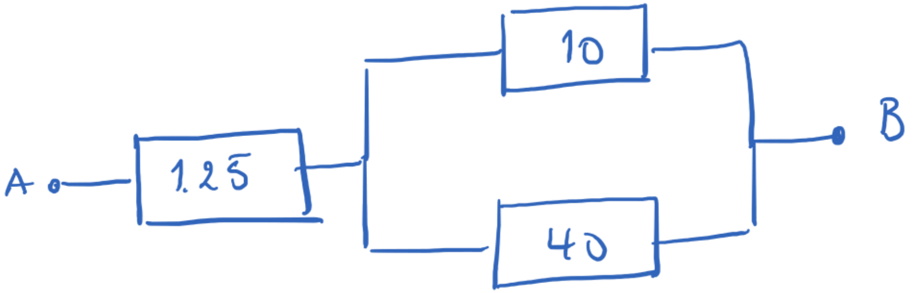


Calcul des résistances R_A, R et R_C :

$$R_A = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = 1.25\ \Omega \qquad R_D = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 2.5\Omega \qquad R_C = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 2.5\Omega$$

- Ensuite nous pourrons simplifier car (R_C et R_4) (R_D et R_5) sont en série ;

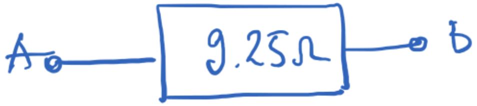
Correction: (Rd et R4) et (Rc et R5) sont en série



- Puis nous avons 10Ω en parallèle avec 40Ω :

$$R_p = \frac{(10)(40)}{50} = 8\Omega$$

- Pour finir les 2 résistances sont en série donc



$$\boxed{R_{AB} = 9.25\Omega}$$

En résumé

Un schéma équivalent de complexité réduite peut être obtenu en groupant les éléments en série et/ou parallèle.

- La résistance équivalente à des résistances en série est toujours plus grande que la plus grande des résistances.
- La résistance équivalente à des résistances en parallèle est toujours plus petite que la plus petite des résistances.

Un agencement de résistances en série peut être utilisé pour obtenir des tensions partielles à partir d’une tension totale.

Un agencement de résistances en parallèle peut être utilisé pour obtenir des courants partiels à partir d’un courant total.

Le théorème de Kennelly permet de changer un agencement étoile en triangle (et vice versa)